10

10 Lösungen

10.1 Kapitel 2

10.1.1 Vektoren

Aufgabe 1)

Die Vektoren in der Abbildung haben folgende Koordinatendarstellungen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2)

$$\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3)

Die Längen der Vektoren sind:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2} \quad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{2} \quad |\vec{c}| = 5 \quad \left|\vec{d}\right| = \sqrt{21} \quad |\vec{e}| = 0 \quad \left|\vec{f}\right| = 2$$

Aufgabe 4)

Die Entfernungen zwischen den Punkten sind:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{29} \quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{37} \quad \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{17}$$
$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{32} \quad \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{2}$$
$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{34}$$

Demnach liegen die Punkte B und D am dichtesten zusammen, und am weitesten auseinander liegen A und C.

Aufgabe 5)

Wir starten beim Punkt A und wandern dann $s \cdot \overrightarrow{AB}$ weiter:

$$\begin{aligned}\vec{P}(\vec{A},\ \vec{B},\ s) &= \vec{A} + s \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \vec{A} + s \cdot \left(\vec{B} - \vec{A}\right) \\ &= (1-s) \cdot \vec{A} + s \cdot \vec{B}\end{aligned}$$

Für die angegebenen Werte:

$$\vec{P}\left(\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\4\\7\end{pmatrix}, \frac{7}{10}\right) = \frac{3}{10} \cdot \begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix} + \frac{7}{10} \cdot \begin{pmatrix}10\\4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8.5\\1.6\\5.8\end{pmatrix}$$

Aufgabe 6)

$$\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} - \left|\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}\right|^2 \cdot \left|\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}\right|^2 + 145$$
$$= 26 + 0 - 26 \cdot 58 + 145 = -1337$$

Aufgabe 7)

Die Vektoren schließen folgende Winkel ein:

$$\measuredangle\left(\vec{a},\ \vec{b}\right) = \frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} 90°$$
$$\measuredangle\left(\vec{c},\ \vec{d}\right) \approx 1.326 \mathrel{\hat{=}} 75.97°$$
$$\measuredangle\left(\vec{e},\ \vec{f}\right) \approx 2.764 \mathrel{\hat{=}} 158.37°$$

Aufgabe 8)

Wenn zwei Vektoren entgegengesetzte Richtungen haben, dann schließen sie einen Winkel von 180° ein. Der Kosinus von 180° ist –1. Das Skalarprodukt der Vektoren entspricht dann also dem negativen Produkt ihrer Längen:

$$\measuredangle\left(\vec{x},\ \vec{y}\right)=180° \Leftrightarrow \vec{x}\cdot\vec{y}=-\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right|$$

Aufgabe 9)

Ja, die binomischen Formeln gelten auch für Vektorvariablen und das Skalarprodukt:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}^2+\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{a}+\vec{b}^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2$$

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{a}\bullet\vec{b}-\vec{b}\bullet\vec{a}+\vec{b}^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{a}\bullet\vec{b}+\vec{b}\bullet\vec{a}-\vec{b}^2=\vec{a}^2-\vec{b}^2$$

Aufgabe 10)

Die Kreuzprodukte sind:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-32\\16\\-4\end{pmatrix}\qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\text{c)}\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad \text{d)}\ \begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\6\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$$

Aufgabe 11)

Die Fläche des Parallelogramms ist:

$$A_P=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}9\\-1\\-14\end{pmatrix}\right|=\sqrt{278}\approx 16.67$$

Die Fläche des Dreiecks ist genau die Hälfte davon, denn das Parallelogramm kann in zwei gleich große Dreiecke aufgeteilt werden:

$$A_D=\frac{A_P}{2}\approx 8.34$$

Aufgabe 12)

Die binomischen Formeln machen für das Kreuzprodukt nicht viel Sinn, da das Kreuzprodukt eines Vektors mit sich selbst den Nullvektor ergibt:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{0}$$
$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{0}$$
$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{\vec{0}}-\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}-\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{0}}=-2\cdot\vec{a}\times\vec{b}=2\cdot\vec{b}\times\vec{a}$$

10.1.2 Matrizen

Aufgabe 1)

a) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 29 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 22 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 8 \\ 5 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 17 & 16 \\ 9 & 26 & 19 & 36 \\ 13 & 22 & 23 & 32 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2)

A ist nicht invertierbar, da $\det(A)=0$.

B ist nicht quadratisch!

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1}=\left(C^{-1}\right)^T=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T$$

E ist nicht invertierbar, da $\det(E)=0$.

$$F^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0.5 \\ 0.75 & -0.25 \end{pmatrix}$$

Die Ergebnisse können überprüft werden, indem die inverse Matrix mit der ursprünglichen Matrix multipliziert wird. Dabei muss sich die Einheitsmatrix ergeben.

Aufgabe 3)

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$(4,\ 2,\ -5) \bullet M = (8,\ -2,\ -2.5)$$

Aufgabe 4)

$$M = \begin{pmatrix} \cos 30° & 0 & \sin 30° \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 30° & 0 & \cos 30° \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.866 \end{pmatrix}$$

$$(1,\ -1,\ 2) \bullet M = (-0.134,\ -1,\ 2.232)$$

Aufgabe 5)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(47,\ 11,\ -15,\ 1) \bullet M = (48,\ 14,\ -8,\ 1)$$

Der transformierte Punkt hat also die Koordinaten (48, 14, –8).

Aufgabe 6)

Zuerst verschieben wir den Punkt, um den wir drehen möchten, zum Koordinatenursprung. Das erreichen wir mit einer Translationsmatrix. Wenn der Ortsvektor des Punkts $\vec{p}$ ist, dann verschieben wir um $-\vec{p}$. Nun führen wir mit einer gewöhnlichen Rotationsmatrix die Drehung durch. Anschließend verschieben wir wieder zurück. Das lässt sich natürlich in einer einzigen Matrix erledigen:

$$M_{\text{Rotation um } \vec{p}} = M_{\text{Translation}}\left(-\vec{p}\right) \bullet M_{\text{Rotation}} \bullet M_{\text{Translation}}\left(\vec{p}\right)$$

Aufgabe 7)

Eine Matrix ist orthogonal, wenn ihre Spaltenvektoren paarweise senkrecht zueinander sind und sie alle die Länge 1 haben. Diese Kriterien sind zu überprüfen. Ob die Spaltenvektoren senkrecht zueinander sind, können wir mit dem Skalarprodukt herausfinden.

Alternative Vorgehensweisen: Überprüfen, ob die Determinante 1 oder –1 ist, oder ob die Inverse gleich der Transponierten ist.

Die Matrizen *A* und *D* sind orthogonal, *B* und *C* nicht.

Aufgabe 8)

$$M = \begin{pmatrix} 0.94 & 0 & 0.342 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.342 & 0 & 0.94 & 0 \\ 45 & 22 & -17 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.94 & 0 & 0.342 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.342 & 0 & 0.94 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 45 & 22 & -17 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 45 & 22 & -17 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \bullet \begin{pmatrix} 0.94 & 0 & 0.342 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.342 & 0 & 0.94 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -45 & -22 & 17 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0.94 & 0 & -0.342 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.342 & 0 & 0.94 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.94 & 0 & -0.342 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.342 & 0 & 0.94 & 0 \\ -36.472 & -22 & 31.366 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9)

$$M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.866 & 0 \\ -0.866 & 0.5 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0.5 & -0.866 & 0 \\ 0.866 & 0.5 & 0 \\ -5.098 & 2.83 & 1 \end{pmatrix}$$

Punkt P von Objektkoordinaten in Weltkoordinaten: mit M transformieren!

$$(4,\ -3,\ 1) \bullet M = (9.598,\ 4.964,\ 1)$$

$\Rightarrow P$ hat die Weltkoordinaten $(9.598,\ 4.964)$.

Punkt Q von Weltkoordinaten in Objektkoordinaten: mit M^{-1} transformieren!

$$(0,\ 1,\ 1) \bullet M^{-1} \approx (-4.232,\ 3.33,\ 1)$$

$\Rightarrow Q$ hat die Objektkoordinaten $(-4.232,\ 3.33)$.

10.1.3 Einfache geometrische Objekte

Aufgabe 1)

Parameterdarstellung (explizite Darstellung):

$$\vec{L}(r) = \vec{A} + r \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{L}(r) = (10,\ 5,\ 4) + r \cdot (2,\ -11,\ -1)$$

Implizite Darstellung:

$$\left(\vec{X} - \vec{A}\right) \times \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\left(\vec{X} - (10,\ 5,\ 4)\right) \times (2,\ -11,\ -1) = \vec{0}$$

Aufgabe 2)

$$\vec{P} = (5,\ -5,\ 3)$$

$$\vec{Q} = (10,\ -1,\ 7)$$

$$\vec{Q} - \vec{P} = (5,\ 4,\ 4)$$

$\vec{X}$	$\vec{X} - \vec{P}$	$\left(\vec{X} - \vec{P}\right) \times \left(\vec{Q} - \vec{P}\right)$	$r = \dfrac{\left(\vec{X} - \vec{P}\right) \bullet \left(\vec{Q} - \vec{P}\right)}{\left(\vec{Q} - \vec{P}\right)^2}$	Auf der Strecke?
$(6,\ -3,\ 4)$	$(1,\ 2,\ 1)$	$(4,\ 1,\ -6) \neq \vec{0}$	/	Nein
$(7.5,\ -3,\ 5)$	$(2.5,\ 2,\ 2)$	$(0,\ 0,\ 0) = \vec{0}$	0.5	Ja
$(15,\ 3,\ 11)$	$(10,\ 8,\ 8)$	$(0,\ 0,\ 0) = \vec{0}$	2	Nein

Aufgabe 3)

a) $\vec{O} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ -0.707 \\ -0.707 \end{pmatrix},\ d = \vec{O} \bullet \vec{n}_0 \approx -1.414$$

Hessesche Normalform: $\vec{X} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -0.707 \\ -0.707 \end{pmatrix} + 1.414 = 0$

b) $\vec{X} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 48 \Leftrightarrow \vec{X} \bullet \begin{pmatrix} 0.577 \\ 0.577 \\ 0.577 \end{pmatrix} = 6.928$

Hessesche Normalform: $\vec{X} \bullet \begin{pmatrix} 0.577 \\ 0.577 \\ 0.577 \end{pmatrix} - 6.928 = 0$

c) $\vec{P}(r,\ s) = \begin{pmatrix} 2 + r - s \\ 1 + 2r - 4s \\ 5s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\vec{O} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \approx \begin{pmatrix} 0.88 \\ -0.44 \\ -0.176 \end{pmatrix},\ d \approx \vec{O} \bullet \vec{n}_0 = 1.321$$

Hessesche Normalform: $\vec{X} \bullet \begin{pmatrix} 0.88 \\ -0.44 \\ -0.176 \end{pmatrix} - 1.321 = 0$

Aufgabe 4)

$$\vec{O}=\vec{A}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{u}=\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix},\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\-8\\4\end{pmatrix},\ \vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}-32\\-12\\-8\end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{X}-\vec{O}\right)\bullet\vec{n}=0\Leftrightarrow\vec{X}\bullet\begin{pmatrix}-32\\-12\\-8\end{pmatrix}+64=0$$

Punkt P einsetzen:

$$\begin{pmatrix}12\\32\\-8\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-32\\-12\\-8\end{pmatrix}+64=-640\neq 0\Rightarrow P \text{ liegt nicht auf der Ebene.}$$

Aufgabe 5)

Als Erstes sollte getestet werden, ob die Gerade parallel zur Ebene ist. Das ist der Fall, wenn der Richtungsvektor der Geraden senkrecht zum Normalenvektor der Ebene ist. Sind Gerade und Ebene parallel, dann kann die Gerade entweder vollständig auf der Ebene liegen oder sie nirgendwo schneiden. Um dies zu testen, setzen wir einen beliebigen Punkt der Geraden in die Ebenengleichung ein. Liegt der Punkt auf der Ebene, dann liegen alle Punkte der Gerade auf der Ebene, ansonsten gar keiner.

Ist die Gerade nicht parallel zur Ebene, dann gibt es auf jeden Fall genau einen Schnittpunkt. Um dessen Koordinaten zu berechnen, verwenden wir für die Gerade die Parameterdarstellung und für die Ebene die implizite Darstellung. Dann brauchen wir die Geradengleichung nur in die Ebenengleichung einzusetzen:

Gerade:	Ebene:
$\vec{L}(r)=\vec{O}+r\cdot\vec{u}$	$\vec{X}\cdot\vec{n}-d=0$

$\vec{L}(r)$ für $\vec{X}$ einsetzen:

$$\begin{aligned}&\vec{L}(r)\bullet\vec{n}-d=0\\ \Leftrightarrow\ &\left(\vec{O}+r\cdot\vec{u}\right)\bullet\vec{n}-d=0\\ \Leftrightarrow\ &\vec{O}\bullet\vec{n}+r\cdot\vec{u}\bullet\vec{n}-d=0\\ \Rightarrow\ &r=\frac{d-\vec{O}\bullet\vec{n}}{\vec{u}\bullet\vec{n}}\end{aligned}$$

Der gefundene Wert für r muss jetzt nur noch in die Geradengleichung eingesetzt werden, um die Koordinaten des Schnittpunkts zu erhalten. Wenn Sie sich den Nenner von r ansehen, werden Sie verstehen, warum es notwendig ist sicherzustellen, dass Gerade und Ebene nicht parallel sind.

Wenn wir es nicht mit einer Geraden, sondern mit einem Strahl zu tun haben, müssen wir prüfen, ob der gefundene r-Wert positiv (oder null) ist. Ist er es nicht, dann gibt es keinen Schnittpunkt. Bei einer Strecke muss r zwischen 0 und 1 liegen.

Aufgabe 6)

Hierzu setzen wir den Mittelpunkt der Kugel in die Ebenengleichung ein und erhalten, auf Grund der Eigenschaften der Hesseschen Normalform, seinen Abstand zur Ebene. Sei d dieser Abstand und r der Radius der Kugel.

- Die Kugel befindet sich komplett vor der Ebene: $d > r$
- Die Kugel befindet sich komplett hinter der Ebene: $d < -r$
- Die Kugel schneidet die Ebene: $-r < d < r$
- Die Kugel berührt die Ebene: $|d| = r$

10.1.4 Farben

Aufgabe 1)

$$Y(C) = C \bullet \begin{pmatrix} 0.299 \\ 0.587 \\ 0.114 \end{pmatrix}$$

$$Y\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0 \qquad Y\left(\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0.1439 \qquad Y\left(\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.25 \\ 0.2 \end{pmatrix}\right) = 0.34895$$

$$Y\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.7 \end{pmatrix}\right) = 0.3733 \qquad Y\left(\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.9 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0.6778 \qquad Y\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$$

Aufgabe 2)

Die Farben müssen zunächst umgerechnet werden:

	Farbe 1			Farbe 2		
	R	G	B	R	G	B
Hexadezimal	1F	07	0C	D9	31	54
Dezimal	31	7	12	217	49	84

Im Wertebereich von 0 bis 1:

Farbe 1: RGB($\frac{31}{255}, \frac{7}{255}, \frac{12}{255}$) $\approx$ RGB(0.122, 0.027, 0.047)

Farbe 2: RGB($\frac{217}{255}, \frac{49}{255}, \frac{84}{255}$) $\approx$ RGB(0.851, 0.192, 0.329)

Nun erfolgt die Transformation in den YUV-Farbraum, um die Chrominanz, also *U* und *V*, zu vergleichen:

$$R_1 = 0.122,\ G_1 = 0.027,\ B_1 = 0.047$$
$$Y_1 = 0.299 \cdot R_1 + 0.587 \cdot G_1 + 0.114 \cdot B_1 \approx 0.058$$
$$U_1 = \left(B_1 - Y_1\right) \cdot 0.493 \approx -0.005$$
$$V_1 = \left(R_1 - Y_1\right) \cdot 0.877 \approx 0.056$$

$$R_2 = 0.851,\ G_2 = 0.192,\ B_2 = 0.329$$
$$Y_2 = 0.299 \cdot R_2 + 0.587 \cdot G_2 + 0.114 \cdot B_2 \approx 0.405$$
$$U_2 = \left(B_2 - Y_2\right) \cdot 0.493 \approx -0.037$$
$$V_2 = \left(R_2 - Y_2\right) \cdot 0.877 \approx 0.391$$

Die Farben haben also nicht dieselbe Chrominanz.

10.1.5 Vermischtes – Multiple Choice

Die korrekten Antworten sind:

1B, 2B, 3A, 4B, 5C, 6A, 7A, 8B, 9C, 10A, 11C, 12B, 13A, 14B, 15B